

Exemples d'utilisation du cosmodétecteur CosmoDCL

Christophe Lagoute, lycée Bellevue Toulouse

4 juillet 2010

[Site internet du projet <http://ch.lagoute.free.fr/CosmoDCL>]

[Texte adapté de C. Lagoute, BUP, **911** (1), 143 (2009)]

I. Flux de muons

I.1. Flux Φ_d à travers le détecteur

Le total des coups N_c enregistré pendant la durée écoulée T_a à l'issue de la mesure dépend de la distance d séparant les détecteurs, de la pression atmosphérique (donc de l'altitude), et dans une moindre mesure, de l'épaisseur des matériaux de construction traversée par les muons avant d'atteindre le détecteur.

Avec par exemple $d = 29,5$ cm, à une altitude de 45 m et au rez-de-chaussée d'un bâtiment de 4 étages, pour $T_a = 1\,001,46$ s, on a mesuré $N_c = 1\,203$. Le flux de muons Φ_d à travers le détecteur est alors :

$$\Phi_d = \frac{N_c}{T_a} \approx \frac{1\,203}{1\,001,46} = 1,2 \text{ coups.s}^{-1} = 72 \text{ coups.min}^{-1}$$

Remarque : Pour les réglages par défaut de la durée de comptage $T_c = 1$ s et un nombre de tirages $n = 1\,000$, on s'attend à une durée de mesure $T_n = nT_c = 1\,000$ identique à T_a . La légère différence observée (moins de 0,2 %), est due à un délais de calcul numérique qui engendrent ce faible retard, mais qui n'affecte pas le calcul du flux par le logiciel.

I.2. Flux Φ_r à travers une raquette

Le flux total de muons à travers la première raquette rencontrée Φ_r n'est pas égal au flux Φ_d mesuré car seuls les muons dont les trajectoires intersectent les deux raquettes sont détectés (Fig. 1a). On définit alors l'efficacité géométrique du détecteur par le rapport :

$$\epsilon_g = \frac{\Phi_d}{\Phi_r} < 1$$

Le calcul analytique de ϵ_g est complexe, aussi, vaut-il mieux recourir à une simulation informatique, plus simple à mettre en oeuvre. La méthode est la suivante :

- i) Tirer aléatoirement la position de l'impact d'un muon sur le détecteur B,
- ii) Tirer aléatoirement la direction incidente de ce muon,
- iii) Déterminer si la trajectoire coupe le détecteur A et compter les muons détectés, parmi un total élevé de muons incidents (10^6 par exemple).

Les variables x et y sont tirées au sort avec des lois de densité de probabilité uniformes sur leurs domaines de variation respectifs $[-l/2, l/2]$, $[-L/2, L/2]$ (Fig. 1b). La densité de probabilité de la variable aléatoire d'angle zénithal θ suit une loi de variation du flux bien représentée par un ajustement proportionnel à $\cos^\alpha \theta$ avec $\alpha = 1,74$.

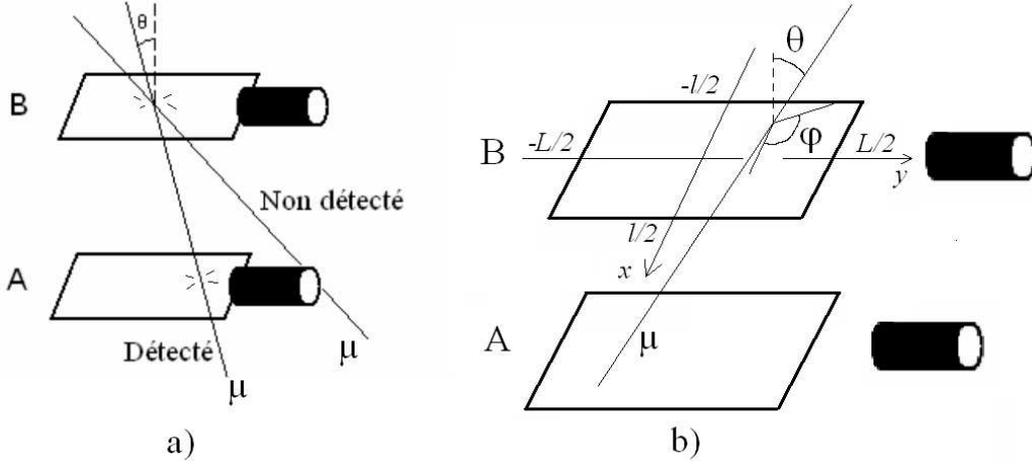


FIG. 1 – Efficacité géométrique du détecteur a) Muons détecté et non détecté b) Simulation par tirage aléatoire

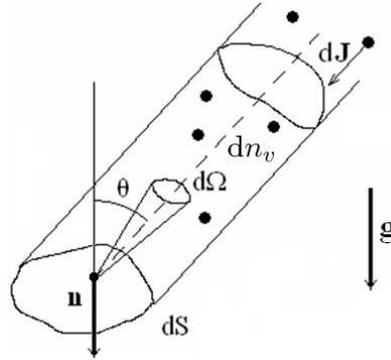


FIG. 2 – Densité volumique de muons

La densité volumique élémentaire dn_v de muons dont la direction d'incidence est comprise dans l'angle solide élémentaire $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, ϕ étant l'azimuth, s'écrit (Fig. 2) :

$$dn_v(\theta) = n_0 \cos^\alpha \theta d\Omega$$

où n_0 est une constante. Si $\mathbf{v}(\theta)$ est le champ de vitesse des muons incidents, le courant volumique élémentaire de muons $d\mathbf{J}$ dont la direction d'incidence est dans l'angle solide $d\Omega$ s'écrit :

$$d\mathbf{J} = dn_v(\theta)\mathbf{v}(\theta) \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{v}(\theta)\| \approx c$$

les muons étant ultra-relativistes. Le flux à travers l'élément de surface dS des muons dont la direction d'incidence est dans l'angle solide $d\Omega$ est égal au flux du courant volumique à travers cette surface :

$$d\Phi_r = d\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = dn_v(\theta)c \cos\theta dS$$

\mathbf{n} étant la normale de l'élément dS . On obtient le flux total en intégrant sur le demi-espace et sur la surface S du détecteur :

$$\Phi_r = n_0 S c \int \cos^{1+\alpha} \theta \sin\theta d\theta d\phi = \frac{\pi}{2} n_0 S c \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} p_\theta p_\phi d\theta d\phi$$

où p_ϕ et p_θ sont les densités de probabilité angulaires normalisées respectivement azimutale et zénithale :

$$p_\phi = \frac{1}{2\pi} \quad \text{et} \quad p_\theta = (2 + \alpha) \cos^{2+\alpha} \theta \sin\theta$$

L'angle p_ϕ est donc tiré au sort selon une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. On montre par ailleurs, que la variable aléatoire Θ de densité de probabilité p_θ s'obtient à partir d'une variable aléatoire Λ uniforme sur $[0, 1]$, avec : $\Theta = \arccos(\Lambda^{1/(2+\alpha)})$.

Sur la figure 3, on a représenté l'inverse de l'efficacité géométrique $1/\epsilon_g$ pour différentes valeurs de la distance d entre les scintillateurs et donné un ajustement polynomial de cette relation. Pour $d = 29,5$ cm, on trouve $\epsilon_g \approx 0,192$, ce qui signifie que seuls 19% des muons qui traversent le détecteur B, atteignent le détecteur A. Dans ces conditions, on trouve un flux corrigé de l'efficacité géométrique égal à :

$$\Phi_r = \frac{\Phi_d}{\epsilon_g} = \frac{1,2}{0,192} = 6,2 \text{ coups.s}^{-1}$$

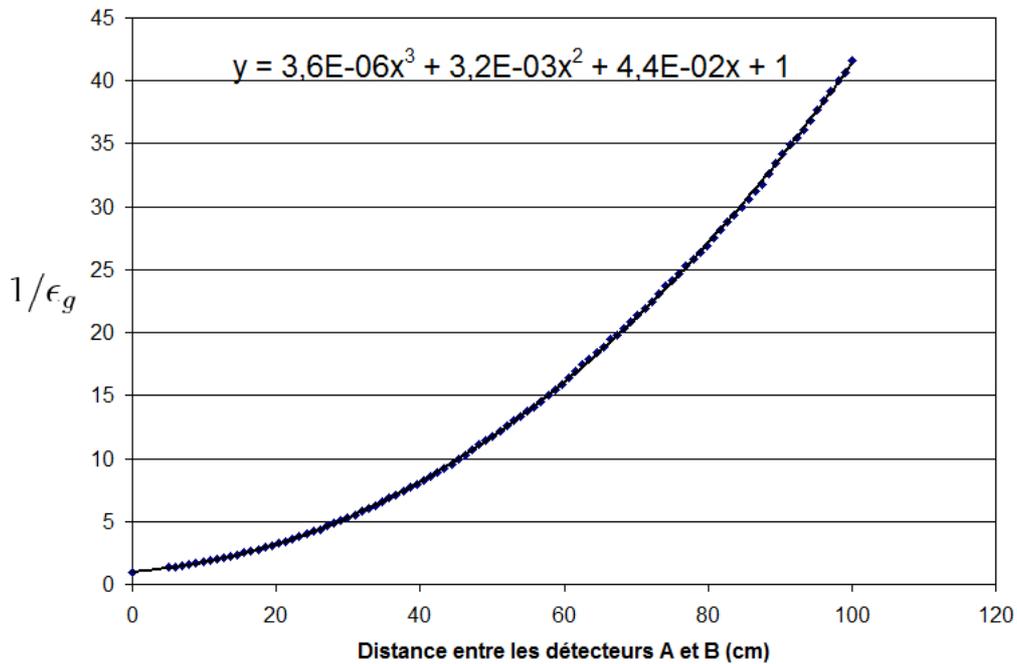


FIG. 3 – Efficacité géométrique du détecteur en fonction de la distance entre les scintillateurs A et B

Remarque : L'efficacité géométrique donnée par le logiciel n'est valable que pour des plaques dont le facteur d'aspect (rapport longueur sur largeur) correspond à celui du cosmodétecteur CosmoDCL, environ 2.

I.3. Flux Φ_m de muons au mètre carré

Le flux de muons Φ_m , c'est-à-dire le nombre de coups par seconde et par mètre carré à une pression atmosphérique donnée, s'obtient en tenant compte de la surface $S = 0,0432 \text{ m}^2$ des scintillateurs :

$$\Phi_m = \frac{\Phi_r}{S} = \frac{6,2}{0,0432} = 145 \text{ coups.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$$

Remarquons que ce flux a été obtenu à partir de la modélisation de la distribution angulaire des muons. Une mesure précise de Φ_m nécessite de s'affranchir de ce modèle, ce que l'on réalise en collant les plaques l'une contre l'autre (Fig. 4). On fixe alors la *Distance AB* à 0, ce qui donne $\epsilon_g = 1$ et neutralise la correction. Il faut aussi modifier la surface de détection qui est réduite : la longueur des plaques passe de 30 cm à 23 cm pour une mâchoire de 7 cm du cylindrique en PVC. Dans ces conditions, on a mesuré la valeur, compatible avec celle donnée dans les tables au niveau de la mer de $130 \text{ coups.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$:

$$\Phi_m = 131 \text{ coups.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$$

Voyons maintenant comment déterminer les incertitudes sur cette mesure.



FIG. 4 – Conditions expérimentales de mesure du flux Φ_m au mètre carré

II. Distribution poissonnienne

Le logiciel de pilotage calcule le nombre *total de coups* N_c d'une mesure en sommant les nombres N_k de coups enregistrés dans les n intervalles successifs des fenêtres temporelles.

$$N_c = \sum_{k=1}^n N_k$$

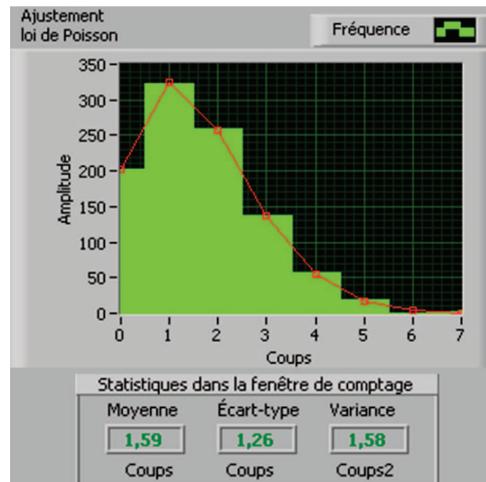


FIG. 5 – Distribution de Poisson $h(N)$ des N_k , moyenne et variance de l'échantillon statistique.

Si la probabilité par unité de temps d'enregistrer un muon est indépendante du temps (cf. annexe 1), alors les nombres N_k sont les réalisations successives d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson (cf. annexe 2). La distribution $h(N)$ des N_k , donne au facteur multiplicatif près N_c , la probabilité $\Pr_{Poisson}(X = N)$ d'obtenir N coups pendant la durée T :

$$h(N) \rightarrow N_c \Pr_{Poisson}(X = N) \quad \text{avec} \quad \Pr_{Poisson}(X = N) = \frac{m_x^N \exp(-m_x)}{N!}$$

m_x désignant la moyenne de X , égale à σ_x^2 , sa variance.

Le logiciel construit l'*histogramme des coups* $h(N)$ en temps réel, c'est-à-dire, en mettant à jour la liste des N_k au fur et à mesure des nouvelles acquisitions, et permet d'observer la convergence de la moyenne et de la variance de l'échantillon N_k vers la même limite $m_x = \sigma_x^2$ (Fig. 5). Une fois la mesure achevée, l'histogramme est ajusté par une loi de Poisson (courbe rouge sur le diagramme). La qualité de cet ajustement valide l'hypothèse de l'indépendance temporelle de la densité de probabilité d'enregistrer un muon, analogue à la loi de décroissance radioactive.

III. Incertitude sur la mesure du flux de muons

III.1. Caractère gaussien de la mesure

En relançant une mesure, on observe généralement que le résultat diffère, signe du caractère aléatoire du phénomène. L'incertitude sur la mesure s'obtient facilement en considérant cette fois, non plus les *durée de comptage* T_c (1 s par défaut), mais la durée totale de la mesure T_a (1 000 s par défaut). En effet, le *total des coups* pendant la durée T_a est la réalisation d'une autre variable aléatoire Y qui, elle aussi, suit une loi de Poisson de moyenne m_y et de variance $\sigma_y^2 = m_y$.

En assimilant la valeur N_c obtenue à m_y , l'écart type est connu et vaut $N_c^{1/2}$. En outre, si m_y est élevée, ce qui commence typiquement à partir de 5, la loi de Poisson tend vers une loi gaussienne qui hérite des mêmes moyenne et variance. En pratique, lors d'une mesure, N_c est de l'ordre de quelques centaines ou milliers.

On peut observer la convergence vers la loi normale à l'aide de la fonction de simulation proposée par le logiciel de pilotage. La distribution obtenue en simulant un grand nombre de mesures est représentée sur la figure 6. La courbe s'ajuste parfaitement par une gaussienne.

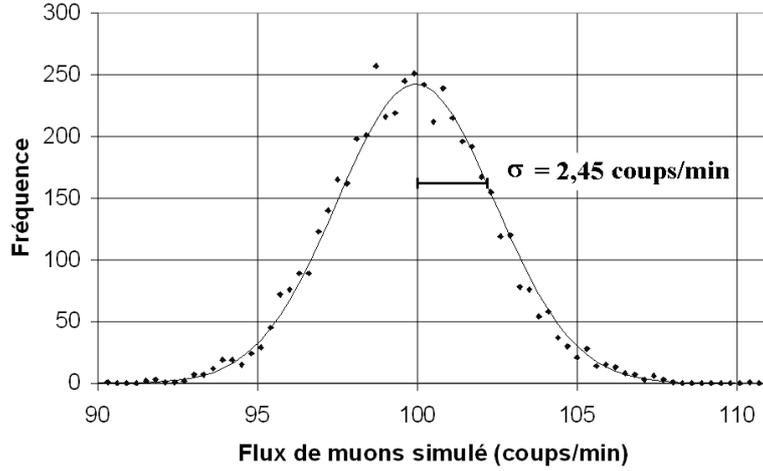


FIG. 6 – Distribution de 5000 valeurs simulées du flux de muons.

III.2. Incertitude associée à un intervalle de confiance

L'incertitude $\delta_q N_c$ due aux fluctuations statistiques sur la mesure de N_c à $q\sigma_y$, q étant un nombre entier, s'écrit :

$$\delta_q N_e = q\sigma_y = qm_y^{1/2} \approx qN_e^{1/2}$$

La convergence vers la loi normale étant atteinte, les valeurs $q = 1, 2$ ou 3 correspondent à des intervalles de confiance respectifs $I_1 = 68,3\%$, $I_2 = 95,5\%$ et $I_3 = 99,7\%$; l'intervalle de confiance I_q donnant le pourcentage de l'échantillon statistique contenu dans l'intervalle $[m_y - q\sigma_y, m_y + q\sigma_y]$.

On en déduit l'encadrement de la mesure du flux simulé Φ_e et son incertitude relative :

$$\Phi_e = \frac{N_e}{T_e} \pm \frac{\delta_q N_e}{T_e} = \frac{N_e}{T_e} \pm q \frac{N_e^{1/2}}{T_e} \quad \text{et} \quad \frac{\delta_q \Phi_e}{\Phi_e} = \frac{q}{N_e^{1/2}}$$

qui décroît en $1/N_e^{1/2}$; la mesure est donc d'autant plus fiable qu'elle comporte un nombre élevé de coups.

Dans les simulations précédentes (Fig. 6), effectuées avec une durée d'acquisition $T_a = 1\,000$ s, on obtient $N_c = 1\,667$. On en déduit le flux et son incertitude à un sigma :

$$\Phi_m = \frac{1\,667}{1\,000} \times 60 = 100 \text{ min}^{-1} \quad \text{et} \quad \delta_1 \Phi_m = \frac{\Phi_m}{N_c^{1/2}} = \frac{100}{1\,667^{1/2}} = 2,45 \text{ min}^{-1}$$

ce qui donne bien l'écart type de la gaussienne qui ajuste la distribution (Fig 6).

Le logiciel de pilotage fournit les incertitudes à $q\sigma_y$, la valeur de q étant modifiable. Ainsi, pour $q = 3$, le flux de muons déterminé dans la section précédente s'écrit avec son incertitude :

$$\Phi_m = 131 \pm 6 \text{ coups.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$$

IV. Détermination du seuil de détection

L'évolution du flux Φ_d mesuré par le détecteur en fonction des valeurs des seuils de détection, identiques sur les deux raquettes, est donné sur la figure 7. Si le seuil est trop bas, le bruit provoque des événements fortuits qui passent à tort pour des muons. Si le seuil est trop haut, le flux mesuré s'effondre et l'on perd des événements. Le seuil convenable se situe sur le palier entre ces deux cas limites. Pour les raquettes utilisées, le seuil se situe entre 180 et 240 mV .

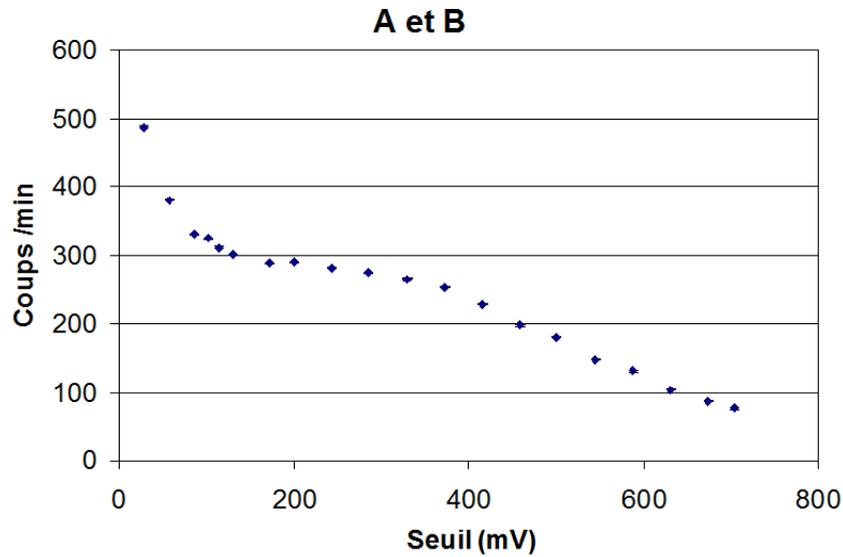


FIG. 7 – Evolution du flux mesuré en fonction du seuil de détection.

V. L'anisotropie zénithale

En pointant le détecteur dans une direction formant un angle θ avec le zénith (Fig. 8a), on observe que le flux reçu varie (Fig. 8b). Cette variation s'ajuste bien à une loi de proportionnalité en $\cos^\alpha \theta$ où $\alpha \approx 1,74$ [1] qui résulte de la combinaison de plusieurs phénomènes :

- i) Intégration angulaire du détecteur due à son ouverture;
- ii) la variation de la longueur du chemin parcouru par les muons avec l'angle de visée : l'épaisseur d'atmosphère traversée dépendant de θ ;
- iii) la perte d'énergie lors de la traversée de l'atmosphère ;
- iv) la désintégration des muons ;
- v) le spectre initial d'énergie des muons.

VI. L'anisotropie azimutale et le signe des charges du RC primaire

Un effet est/ouest, très instructif, peut être mis en évidence : le flux reçu en direction de l'ouest est légèrement plus important qu'en direction de l'est. Cette anisotropie azimutale indique que les particules incidentes sont majoritairement positives. En effet, si l'on considère deux faisceaux incidents

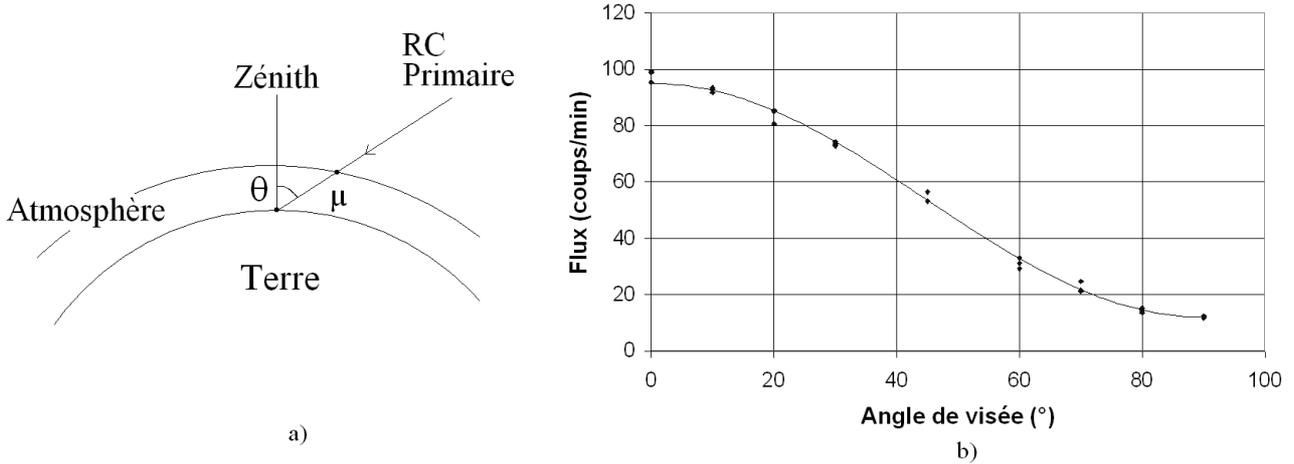


FIG. 8 – Visée en dehors du zénith a) Angle zénithal b) Anisotropie zénithale du flux

dans le plan équatorial, initialement confondus sur une même trajectoire radiale, l'un constitué de particules de charge positive, l'autre, de particules de charge négative (Fig. 9a), la déviation magnétique est telle qu'en un point M de l'équateur, on ne reçoit du faisceau initial que les charges positives dans la direction de l'ouest ; les charges négatives ayant été déviées, elles, vers l'ouest. Un excès de charges positives dans le faisceau incident engendre donc un flux accru en direction de l'ouest.

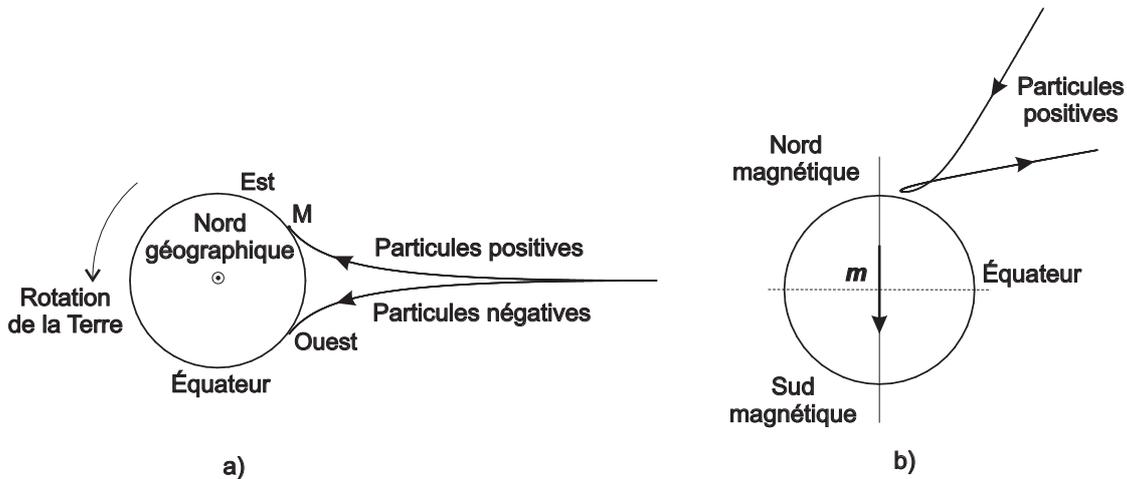


FIG. 9 – Interaction avec la Terre a) Effet est-ouest b) Interaction particule-dipôle

En pointant le détecteur à 45° d'angle zénithal de part et d'autre de la direction nord-sud magnétique, et en intégrant suffisamment longtemps afin de réduire les incertitudes de mesure (90 h de chaque coté), on a pu mesurer :

$$\Phi_{d,est} = 62,0 \pm 0,1 \text{ coups.min}^{-1} \quad \Phi_{d,ouest} = 63,4 \pm 0,1 \text{ coups.min}^{-1}$$

ce qui démontre la nature positive des charges du rayonnement cosmique primaire.

VII. Rôle protecteur de la magnétosphère terrestre

Plus généralement, le mouvement d'une particule du rayonnement cosmique dans l'environnement terrestre dépend de sa trajectoire initiale et de son énergie. Comme le champ magnétique terrestre est bien représenté par celui d'un dipôle magnétique placé au centre de la Terre, le problème se ramène à l'étude du mouvement de particules chargées dans le champ d'un dipôle de moment m (Fig. 9b).

Il est possible de simuler la trajectoire des protons du rayonnement cosmique primaire à l'aide d'un tube de Perrin produisant un faisceau d'électrons, accélérés sous une tension de 600 V. Si l'on approche un aimant « usuel » du laboratoire, et si l'on adopte comme loi d'échelle 10 cm représentant 10 000 km, soit environ le diamètre terrestre, les ordres de grandeur en jeu sont similaires à l'approche d'un proton cosmique d'énergie 4 Ge : la trajectoire du faisceau d'électrons et de ce proton sont alors homothétiques.

Le chapelet de photos représenté sur la figure 10 montre les trajectoires des particules incidentes en fonction de l'inclinaison de l'aimant. On voit qu'au niveau des pôles, le faisceau parvient à s'approcher de l'aimant alors qu'au niveau de l'équateur, le faisceau est dévié. De manière analogue, la magnétosphère terrestre dévie les protons incidents plus facilement à l'équateur qu'aux pôles, où le rayonnement cosmique est plus intense.

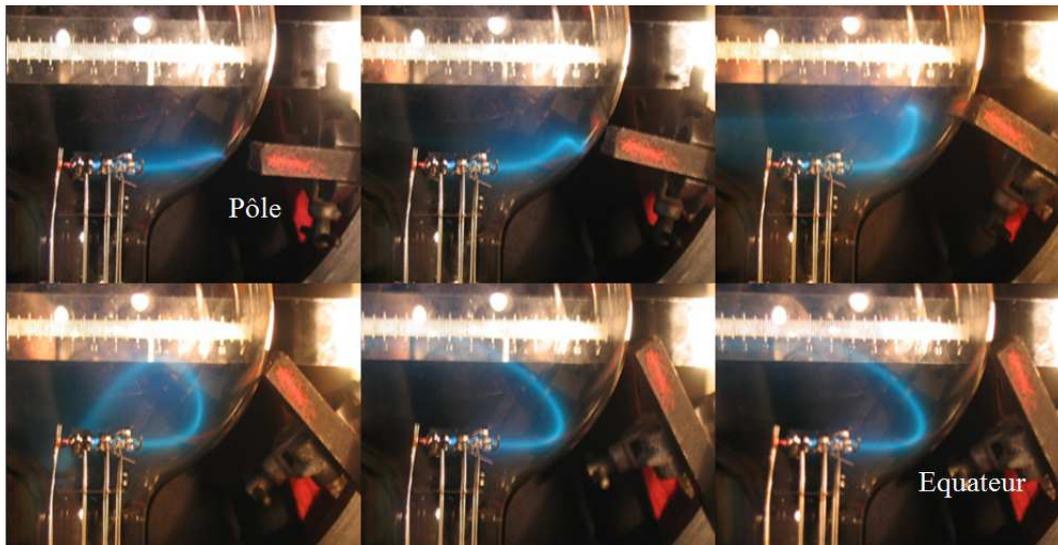


FIG. 10 – Tube de Perrin pour simuler la trajectoire d'un proton incident du rayonnement cosmique

VIII. Test de la relativité restreinte

VIII.1. Variation du flux avec l'altitude

Le flux de muons varie avec l'altitude. On peut effectuer des mesures en rendant le détecteur mobile, par exemple en utilisant un convertisseur stabilisé 220 V qui fonctionne sur la prise de l'allume cigarette d'un véhicule.

Les mesures obtenues dans les Pyrénées jusqu'à 2 400 m d'altitude ont été portées sur la figure 11. Les altitudes ont été relevées sur une carte IGN Top 25 des Pyrénées, puis comparées avec celles données par Google Earth ; l'écart constaté est inférieur à 10 m, d'où un positionnement altimétrique satisfaisant.

Le flux de muons croît avec l'altitude z , ce qui constitua historiquement une preuve de l'origine extraterrestre du rayonnement reçu. Les données s'ajustent convenablement à la loi exponentielle suivante :

$$\Phi_d = \Phi_{0,d} \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{avec} \quad \Phi_{0,d} = 99 \text{ coups} \cdot \text{min}^{-1} \quad \text{et} \quad z_0 = \frac{1}{0,378} = 2,65 \text{ km}$$

VIII.2. Relativité du temps

L'effet relativiste de la dilatation des durées justifie la présence des muons au niveau du sol. La durée de vie τ' d'un muon dans le référentiel terrestre est reliée à celle τ_p dans son référentiel propre

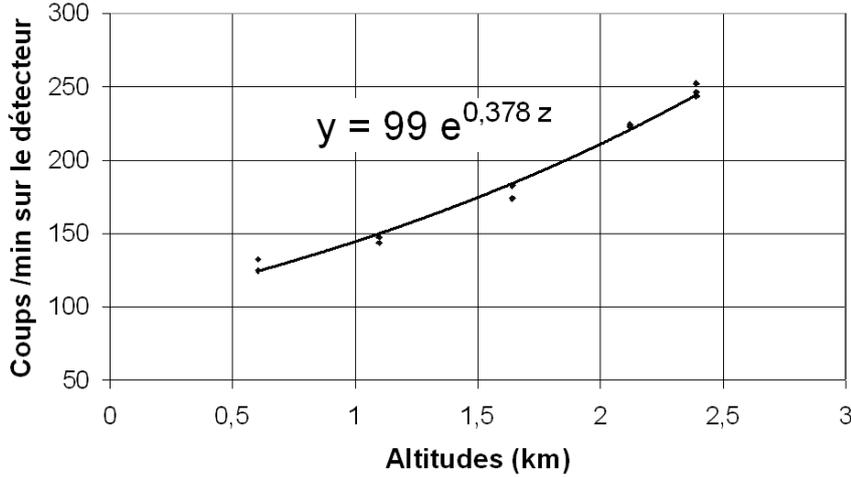


FIG. 11 – Mesures dans les Pyrénées

par :

$$\tau_p = \frac{\tau'_p}{\gamma}$$

Supposons que le flux enregistré soit assimilable à un faisceau incident monoénergétique d'énergie \mathcal{E} . La loi de désintégration étant exponentielle, la réduction de la population de muons au cours du temps lors du trajet dans l'atmosphère, entre deux instants t'_1 et t'_2 de passage dans le référentiel terrestre en des points d'altitudes respectives z_1 et z_2 (Fig. 12) est donnée par :

$$N(t'_2) = N(t'_1) \exp\left(-\frac{t'_2 - t'_1}{\tau'_p}\right)$$

Si l'on néglige la perte d'énergie le long du trajet des muons, la distance parcourue s'écrit :

$$z_1 - z_2 = v \times (t'_2 - t'_1) \approx c \times (t'_2 - t'_1)$$

les muons étant ultra-relativistes. On en déduit l'expression de la variation de la population avec l'altitude :

$$N(z_1) = N(z_2) \exp\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) \quad \text{où} \quad z_0 = \gamma c \tau_p$$

L'énergie du faisceau est donc :

$$\mathcal{E} = \gamma m_\mu c^2 = \frac{z_0}{c \tau_p} m_\mu c^2 = \frac{2650}{3 \times 10^8 \times 2,2 \times 10^{-6}} \times 106,8 = 430 \text{ MeV}$$

soit environ $1/2 \text{ GeV}$, à comparer aux quelques GeV des muons reçus. L'écart provient de l'hypothèse simpliste d'un faisceau monoénergétique. Un modèle plus élaboré, dans lequel on tiendrait compte de l'étalement énergétique du faisceau, conduirait à déterminer l'énergie de coupure des muons avec une précision très satisfaisante.

IX. Détection et mesure de la radioactivité naturelle

En configurant CosmoDCL en détection sur une seule voie, le flux mesuré correspond essentiellement aux électrons de la radioactivité naturelle. Il suffit de présenter la raquette à proximité d'une source naturelle, par exemple quelques kilogrammes de granite, pour enregistrer un flux accru. On peut ainsi évaluer l'activité relative de roches granitiques en fonction de la masse de granite au contact de la raquette (Fig. 13).

Il est possible de comparer les distributions obtenues en présence et en absence du granite, en déplaçant le détecteur en cours de mesure. On observe alors deux distributions bien séparées (Fig. 14).

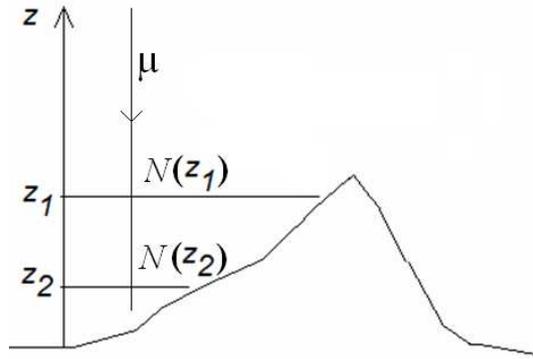
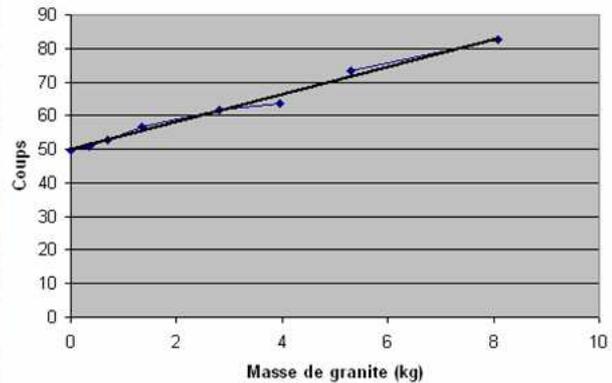


FIG. 12 – Trajet de muons en incidence zénithale



a)



b)

FIG. 13 – Mesure de radioactivité naturelle a) Dispositif expérimental b) Evolution du flux mesuré en fonction de la masse de granite

Annexe 1 - Loi de décroissance exponentielle

Densité de probabilité

Un événement aléatoire, dont la probabilité λ par unité de temps qu'il se réalise est indépendante du temps, est décrit par une variable aléatoire Γ dont la densité de probabilité $g(t)$ suit la loi de décroissance exponentielle :

$$g(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

Citons par exemple l'instant de détection d'un muon mesuré depuis un instant origine arbitraire, la durée qui sépare l'arrivée de deux muons, et celle entre l'instant de détection d'un muon et celui de sa désintégration.

Afin d'établir ce résultat, écrivons la probabilité p_0 que l'événement se produise entre l'instant origine et Δt , un petit intervalle de temps (Fig. 15) :

$$p_0 = \Pr(\Gamma < \Delta t) = \lambda \Delta t$$

La probabilité p'_0 qu'il se réalise, dans un même intervalle de durée, entre les instants $k\Delta t$ et $(k+1)\Delta t$, k étant un nombre entier, vaut aussi p_0 , puisqu'elle est indépendante du temps :

$$p'_0 = \Pr(k\Delta t < \Gamma < (k+1)\Delta t) = p_0$$

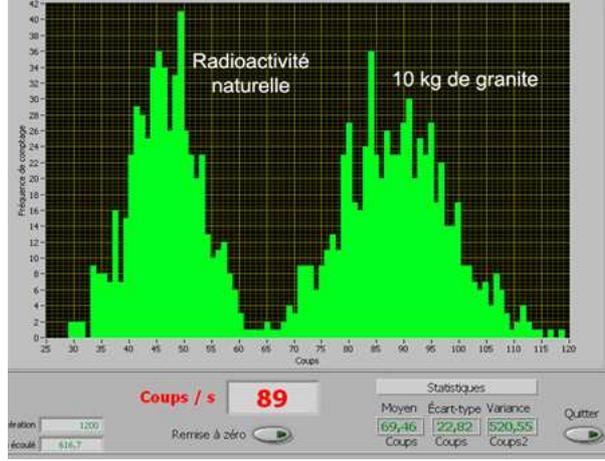


FIG. 14 – Distributions biens séparées, en présence et en absence des roches granitiques

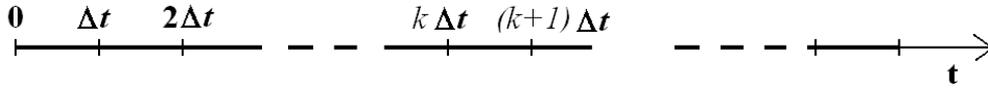


FIG. 15 – Découpage d'un intervalle temporel de durée T en n intervalles de durée Δt .

Calculons la probabilité p_k de ne pas observer d'événement avant l'instant $t = k\Delta t$, et de l'observer avant l'instant $(k + 1)\Delta t$. La probabilité de non réalisation dans un intervalle Δt étant $1 - p_0$, celle de sa réalisation valant p_0 , p_k s'écrit :

$$p_k = (1 - p_0)^k p_0$$

En faisant tendre Δt vers zéro, on en déduit la densité probabilité $g(t)$ de Γ à l'instant t :

$$g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_k}{\Delta t} = \lambda \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \lambda \Delta t)^{t/\Delta t} \quad \text{avec} \quad k = \frac{t}{\Delta t}$$

Puisque $\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$, en posant $n = 1/\Delta t$ et $x = -\lambda$, on en déduit la relation recherchée : $g(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$.

Moyenne et variance

La valeur moyenne d'une loi exponentielle est facile à déterminer :

$$\langle \Gamma \rangle = \int_0^\infty t \times g(t) dt = \lambda \int_0^\infty t \exp(-\lambda t) dt = \lambda \left[-\frac{t \exp(-\lambda t)}{\lambda} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

Un calcul analogue permet d'établir l'expression de la variance : $\sigma^2 = 1/\lambda^2$.

Probabilité de réalisation

La probabilité de réalisation de l'événement dans un intervalle de durée T est :

$$\text{Pr}_{exp}(\Gamma < T) = \int_0^T g(t) dt = \lambda \int_0^T \exp(-\lambda t) dt = 1 - \exp(-\lambda T)$$

celle qu'il ne se réalise pas valant : $\exp(-\lambda T)$

Annexe 2 - Loi de Poisson

La variable aléatoire X donnant le nombre de réalisations de Γ dans un intervalle de durée T , suit une loi de Poisson, du nom du mathématicien français Siméon Poisson du XIX^e siècle, dont l'expression est la suivante :

$$\Pr_{Poisson}(X = k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \exp(-\lambda T)$$

qu'on se propose de démontrer.

La densité de probabilité de réalisation d'un premier événement à l'instant t est donnée par l'expression exponentielle (cf. annexe 2) :

$$g(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

Plus généralement, la densité de probabilité de réalisation d'un k ème événement à l'instant t est donnée par la fonction d'Erlang, du nom du mathématicien danois Agner Erlang du début du XX^e siècle :

$$g_k(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} \exp(-\lambda t)$$

dont on vérifie facilement qu'elle s'identifie à $g(t)$ lorsque $k = 1$.

Afin d'établir cette relation récurrente, supposons-la vérifiée au rang k et déterminons la densité de probabilité $g_{k+1}(t)$ de la réalisation du $(k+1)$ ème événement à l'instant t . Si Γ_k est la variable aléatoire donnant l'instant t_k de réalisation de l'événement k , de densité de probabilité $g_k(t_k)$, le prochain événement se produira au bout d'une durée τ donnée par la variable aléatoire Γ , de densité de probabilité $g(\tau)$. Ces deux variables étant indépendantes, $g_{k+1}(t_k, \tau)$ s'écrit :

$$g_{k+1}(t_k, \tau) = g_k(t_k) \times g(\tau)$$

La probabilité que l'événement $k+1$ ait lieu avant l'instant t est donc :

$$\Pr(\Gamma_k + \Gamma < t) = \int_{\mathcal{D}} g_k(t_k) \times g(\tau) dt_k d\tau = \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} \int_{\mathcal{D}} t_k^{k-1} \exp[-\lambda(t_k + \tau)] dt_k d\tau$$

l'intégrale double portant sur le domaine \mathcal{D} défini par $t_k + \tau < t$ (Fig. 16a). En explicitant, on trouve :

$$\Pr(\Gamma_k + \Gamma < t) = \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} \int_{t_k=0}^t t_k^{k-1} \exp(-\lambda t_k) dt_k \int_{\tau=0}^{t-t_k} \exp(-\lambda \tau) d\tau$$

qui donne, en intégrant sur τ :

$$\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^t t_k^{k-1} [\exp(-\lambda t_k) - \exp(-\lambda t)] dt_k = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \left[\int_0^t t_k^{k-1} \exp(-\lambda t_k) dt_k - \frac{t^k}{k} \exp(-\lambda t) \right]$$

La densité de probabilité $g_{k+1}(t) = g_{k+1}(t_k, \tau)$ s'obtient en dérivant cette expression par rapport à t :

$$g_{k+1}(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \left(t_k^{k-1} - t_k^{k-1} + \lambda \frac{t^k}{k} \right) \exp(-\lambda t) = \frac{\lambda^{k+1}}{k!} t^k \exp(-\lambda t)$$

ce qui établit la relation d'Erlang.

On peut alors calculer la probabilité $\Pr(X = k)$ qu'il se produise k événements dans un intervalle de durée T , probabilité égale au produit de celle qu'il se produise k événements avant un instant $t_k < T$, par celle que le $k + 1$ ème se déroule à l'issue d'une durée τ telle que $t_k + \tau > T$:

$$\Pr(X = k) = \int_{\mathcal{D}'} g_k(t_k) \times \lambda g(\tau) dt_k d\tau = \int_{t_k=0}^T g_k(t_k) dt_k \int_{\tau=T-t_k}^{\infty} \lambda \exp(-\lambda\tau) d\tau$$

le domaine d'intégration \mathcal{D}' étant représenté sur la figure 16b. En intégrant sur τ , on obtient :

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_{t_k=0}^T t_k^{k-1} \exp(-\lambda T) dt_k = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \exp(-\lambda T)$$

c'est-à-dire, la loi de Poisson.

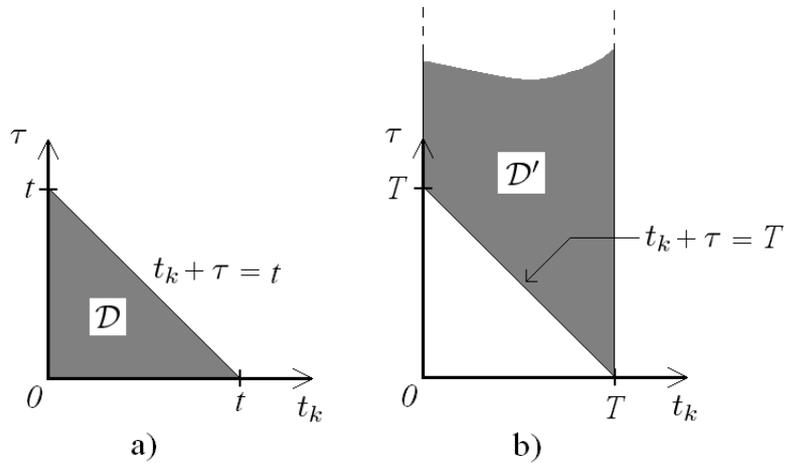


FIG. 16 – Domaines d'intégration associés à deux événements a) Se déroulant avant t b) Dont un se réalise avant T , l'autre, après.

Bibliographie

- [1] J. W. Lin et al. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, **619**, (2010) p24-27